

# Máster Universitario en Túneles y Obras Subterráneas



**ÁREA: A**  
**MÓDULO: ESTÁTICA DE SUELOS**

**TÚNELES EN MEDIOS REOLÓGICOS**

-

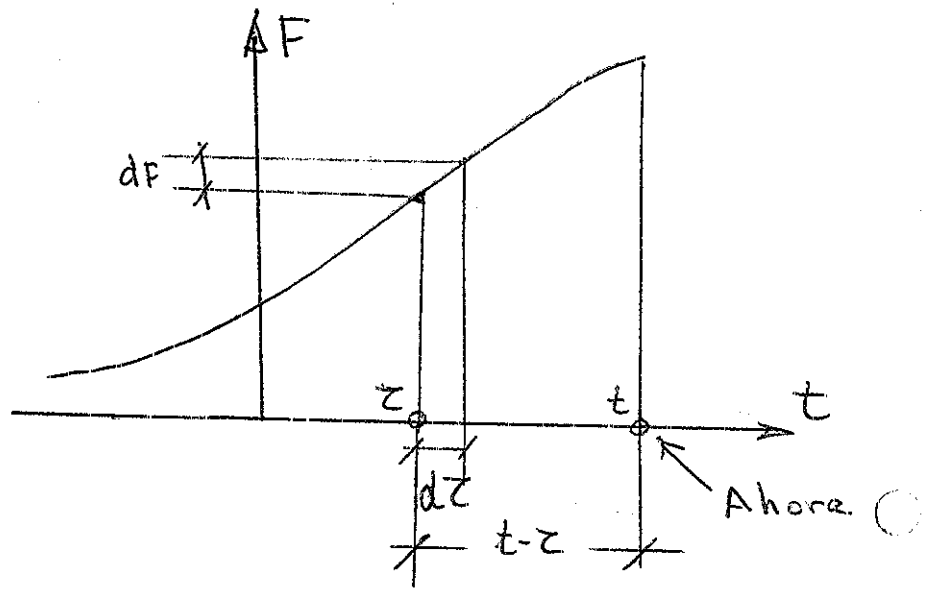
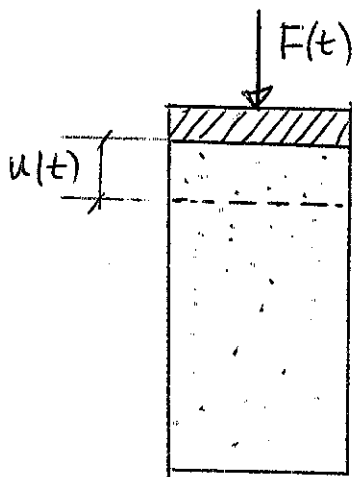
**Ponente: A. Serrano**  
**Día: 26/01/07**  
**Hora:**

Alcibíades ~~Semo~~

donde 13/02 y 14/02

Táboles e Medios Reológicos.

# ENFOQUE INTEGRAL



$du$  - Colaboración en el acortamiento total actual  $u(t)$  de un incremento de carga  $dF$  colocada en un instante  $\tau$  del pasado

$$du = c(t - \tau) dF$$

$(t - \tau)$  - Función de influencia de la carga  $F$  en el acortamiento,  
Depende de los parámetros del material y del tiempo transcurrido  $t - \tau$ , desde su colocación

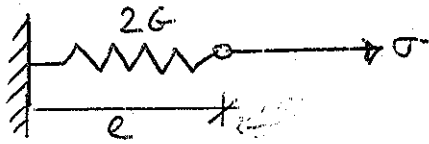
Integrando para toda la variación de la carga en el pasado

$$u(t) = \int_0^F c(t - \tau) dF = \int_{-\infty}^t c(t - \tau) \frac{dF}{d\tau} d\tau$$

# ENFOQUE DIFERENCIAL

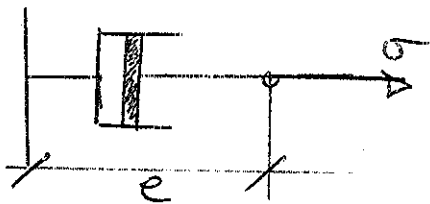
## Elementos simples

- Sólido elástico (resorte)



$$e = \frac{\sigma}{2G}$$

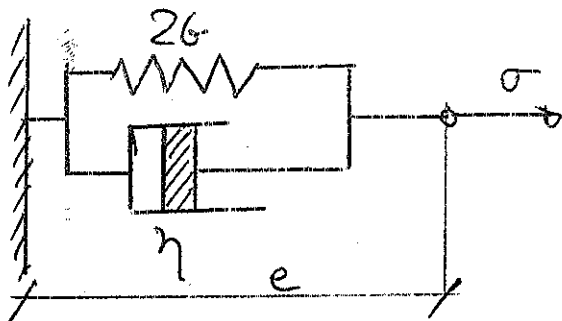
- Líquido viscoso (pistón)



$$\dot{e} = \frac{\sigma}{\eta}$$

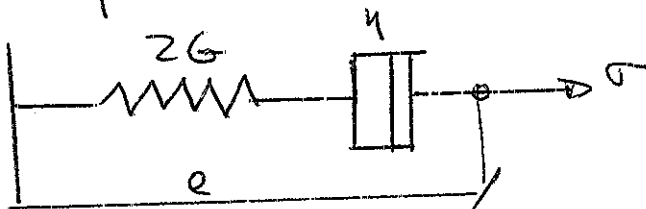
## Elementos compuestos (ejemplos)

- Sólido de Kelvin-Voigt



$$\sigma = 2Ge + \eta \dot{e}$$

- Líquido de Maxwell



$$\frac{\sigma}{2G} + \frac{\sigma}{\eta} = \dot{e}$$

## 1.8.1 Tipos de materiales reológicos

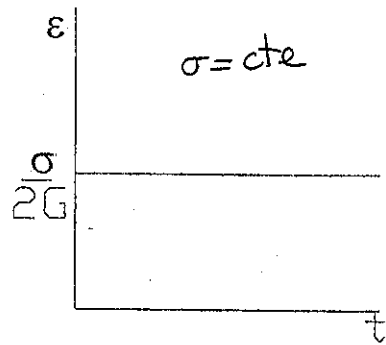
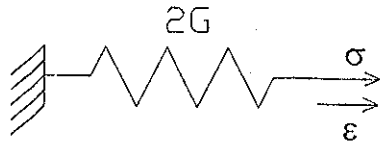
### 1.8.1.1 Cuadro general

Aquí se presenta la configuración mecanicista de los materiales reológicos que se combinarán en el siguiente sub capítulo para estudiar la convergencia de los túneles en medios viscoelásticos. También se presentan los polinomios de sus formulaciones diferenciales en el dominio de la variable  $s$  de la transformada de Laplace. Y la forma de sus respuestas en el dominio del tiempo.

#### 1.8.1.1.1 De un elemento

Cuerpo elástico (E):

$$\bar{Q}_1(s) = 2G \quad \bar{P}_1(s) = 1$$

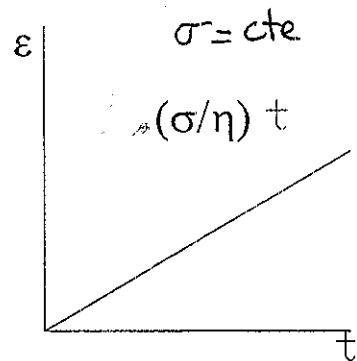
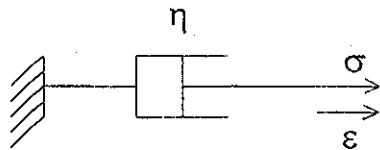


En general

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{2G}$$

Cuerpo viscoso (E):

$$\bar{Q}_1(s) = \eta s \quad \bar{P}_1(s) = 1$$



Relajación:

$$\sigma(t) = \eta \dot{\varepsilon}(t)$$

Fluencia

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{\eta} \int_0^t \sigma(\tau) d\tau$$

caso  $\sigma(t) = cte$

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{\eta} t$$

### Parámetros viscoelásticos

$$\text{Módulo de rigidez transversal: } \overline{2G} = \frac{\overline{Q}_1(s)}{\overline{P}_1(s)} = 2G + \eta s$$

$$\text{Módulo de compresibilidad: } \overline{3K} = \frac{\overline{Q}_2(s)}{\overline{P}_2(s)} = 3K$$

$$\text{Coeficiente de Poisson: } \overline{\nu}(s) = \frac{\overline{3K} - \overline{2G}}{\overline{6K} + \overline{2G}} = \frac{3K - 2G - \eta s}{6K + \eta s + 2G}$$

$$1 - \overline{\nu}(s) = \frac{6K + \eta s + 2G - 3K + 2G + \eta s}{6K + \eta s + 2G} = \frac{3K + 4G + 2\eta s}{6K + \eta s + 2G}$$

$$\frac{1 - \overline{\nu}(s)}{2G} = \frac{3K + 4G + 2\eta s}{6K + \eta s + 2G} \cdot \frac{1}{2G + \eta s}$$

### Asiento viscoelástico:

Al reemplazar esta expresión en la transformada de la ecuación constitutiva (1-69), y teniendo presente que  $\sigma$  es constante, se obtiene que:

$$\frac{\overline{u}}{2a} = \frac{1 - \overline{\nu}}{2G} \sigma \quad (1-70)$$

$$\frac{\overline{u}}{2a} = \left( \frac{1}{s} \frac{3K + 4G + 2\eta s}{6K + 2G + \eta s} \frac{1}{2G + \eta s} \right) \sigma = \left( \frac{A}{s} + \frac{B}{6K + 2G + \eta s} + \frac{C}{2G + \eta s} \right) \sigma = \overline{\phi}(s) \sigma$$

### Valoración del asiento en el tiempo:

$$u(t) = 2a \left( \frac{3K + 4G}{4G(3K + G)} + \frac{3}{4(3K + G)} e^{-\frac{2(3K+G)t}{\eta}} - \frac{1}{4G} e^{-\frac{2Gt}{\eta}} \right) \sigma$$

## 1.2 Relaciones tensión-deformación en forma de ecuaciones integrales

Con la finalidad de generalizar la ecuación constitutiva (1-2), a medios continuos en tres dimensiones, Sternberg y Gurtin (1962), sustituyeron la relación sollicitación – efecto, por la siguiente relación tensorial tensión-deformación:

$$\sigma_{ij}(x,t) = \int_{-\infty}^t G_{ijkl}(x,t-\tau) \frac{\partial e_{kl}}{\partial \tau}(x,\tau) d\tau \quad (1-3)$$

Definiendo así la *integral de convolución* que relaciona la tensión y la deformación en un cuerpo viscoelástico. En esta integral  $\sigma_{ij}(x,t)$  es el tensor de tensión y  $e_{kl}(x,t)$  es el tensor de deformación, de cada punto  $x$  del espacio de coordenadas cartesianas  $(x_1, x_2, x_3)$  del sólido, y en el intervalo  $-\infty < t < \infty$ . El tensor de deformación es de orden infinitesimal y, está definido por la expresión:

$$e_{kl} = \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial l} + \frac{\partial u_l}{\partial k} \right) \quad (1-4)$$

$G_{ijkl}$ , es un tensor de cuarto orden, denominado función tensorial de relajación del material. Por lo tanto la integral (1-3), es la notación tensorial de la ley de tensión – deformación de tipo relajación.

La inversa de esta relación es la ley tensión – deformación de tipo fluencia, y existe si  $G_{ijkl}$ , es doblemente diferenciable, y si su valor en  $\tau = 0$ , es diferente de cero, Sternberg y Gurtin (1962):

$$e_{ij}(x,t) = \int_{-\infty}^t J_{ijkl}(x,t-\tau) \frac{\partial e_{kl}}{\partial \tau}(x,\tau) d\tau \quad (1-5)$$

En ella  $J_{ijkl}$ , es un tensor de cuarto orden, denominado función tensorial de fluencia del material.

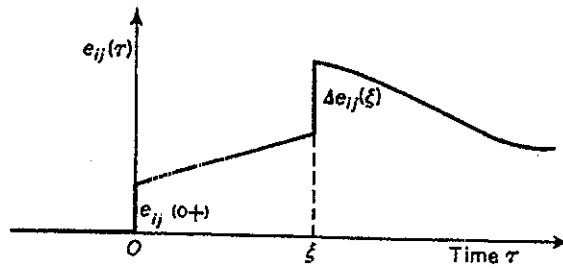


Fig. 1.2: Ilustración de una historia de carga con saltos.

Cuando el movimiento empieza en  $\tau = 0$ , a partir de unas condiciones iniciales, de tensión y deformación, la integral (1-3), tiene la siguiente forma:

$$\sigma_{ij}(x,t) = e_{kl}(x,0^+) G_{ijkl}(x,t) + \int_0^t G_{ijkl}(x,t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} e_{kl}(x,\tau) d\tau \quad (1-6)$$

El primer término del segundo miembro de esta ecuación es el efecto en el instante  $t$ , de la deformación inicial  $e_{kl}(x,0^+)$ , sobre la tensión. Debido a que para  $t < 0$ ;  $\sigma_{ij} = e_{ij} = 0$ , es importante resaltar que  $e_{kl}(x,0^+)$  es el valor de la deformación inicial cuando  $t \rightarrow 0$  desde el lado positivo del tiempo, Fig. 1.2. Del mismo modo se define la relación tensión deformación del tipo fluencia.

Cada material viscoelástico está definido por sus funciones tensoriales de relajación y fluencia. Estas funciones deben determinarse experimentalmente, dependen de la naturaleza del material y también deben cumplir con los principios de la termodinámica.



En notación corta, las integrales de convolución (1-3) y (1-5), se escriben del siguiente modo:

$$\sigma_{ij} = G_{ijkl} * de_{kl} \quad (1-7)$$

$$e_{ij} = J_{ijkl} * d\sigma_{kl} \quad (1-8)$$

La integral de convolución tiene las siguientes propiedades:

$$\phi * d\psi = \psi * d\phi \quad (\text{conmutatividad})$$

$$\phi * d(\psi * d\theta) = (\phi * d\psi) * d\theta = \phi * d\psi * d\theta \quad (\text{asociatividad})$$

$$\phi * d(\psi + \theta) = \phi * d\psi + \phi * d\theta \quad (\text{distributividad})$$

$$\phi * d\psi \equiv 0 \text{ implica que } \phi \equiv 0 \text{ o que } \psi \equiv 0 \quad (\text{teorema de Titchmarsh})$$

En estas expresiones:  $\phi$  es una función definida en el intervalo  $0 \leq t < \infty$ ,  $\psi$  y  $\theta$  son funciones definidas en el intervalo  $-\infty < t < \infty$ .

La propiedad de la conmutatividad antes mencionada, permite escribir las expresiones (1-7) y (1-8) del siguiente modo:

$$\sigma_{ij} = G_{ijkl} * de_{kl} = e_{kl} * dG_{ijkl} \quad (1-9)$$

$$e_{ij} = J_{ijkl} * d\sigma_{kl} = \sigma_{kl} * dJ_{ijkl} \quad (1-10)$$

Para materiales isotrópicos,  $G_{ijkl}$  y  $J_{ijkl}$ , son invariantes con respecto a la rotación de ejes cartesianos:  $G_{ijkl} = G_{jikl} = G_{ijlk}$ , también  $J_{ijkl} = J_{jikl} = J_{ijlk}$ , y se puede escribir:

$$G_{ijkl} = \frac{G_2 - G_1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{G_1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (1-11)$$

Siendo  $G_1$  y  $G_2$ , funciones escalares iguales a cero para  $-\infty < t < 0$ , y denominadas funciones de relajación en corte y en compresión isotrópica respectivamente.

Finalmente para estos materiales isotrópicos, las relaciones tensión deformación tipo relajación: de corte y de compresión isotrópica, quedan separadas al reemplazar (1-11) en (1-7). Hecho esto, las relaciones de tipo relajación son:

En corte: 
$$\sigma'_{ij} = e'_{ij} * dG_1 = G_1 * de'_{ij} \quad (1-12)$$

En compresión isotrópica:

$$\sigma_{kk} = e_{kk} * dG_2 = G_2 * de_{kk} \quad (1-13)$$

Siendo: 
$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} \quad \text{y} \quad e'_{ij} = e_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} e_{kk} \quad (1-14)$$

De modo similar, las relaciones tipo fluencia son:

En corte: 
$$e'_{ij} = \sigma'_{ij} * dJ_1 = J_1 * d\sigma'_{ij} \quad (1-15)$$

En compresión isotrópica:

$$e_{kk} = \sigma_{kk} * dJ_2 = J_2 * d\sigma_{kk} \quad (1-16)$$

### 1.3 Relaciones tensión-deformación en forma de ecuaciones diferenciales

Maurice A. Biot (1954), mostró que cuando las funciones de relajación consisten en un espectro discreto finito, las relaciones tensión deformación, de un material viscoelástico isótropo, se podían escribir en la forma de las ecuaciones diferenciales indicada a continuación:

$$\text{En corte:} \quad \sum_{k=0}^{n_1} a_k \frac{\partial^k}{\partial t^k} \sigma'_{ij} = \sum_{k=0}^{m_1} b_k \frac{\partial^k}{\partial t^k} e'_{ij} \quad (1-17)$$

$$\text{En compresión isótropa:} \quad \sum_{k=0}^{n_2} c_k \frac{\partial^k}{\partial t^k} \sigma_{kk} = \sum_{k=0}^{m_2} d_k \frac{\partial^k}{\partial t^k} e_{kk} \quad (1-18)$$

Igual que en el caso de la notación corta de las integrales de convolución, se acostumbra escribir estas ecuaciones de la siguiente forma:

$$\text{En corte:} \quad P_1(D)\sigma'_{ij} = Q_1(D)e'_{ij} \quad (1-19)$$

$$\text{En compresión volumétrica:} \quad P_2(D)\sigma_{kk} = Q_2(D)e_{kk} \quad (1-20)$$

En ellas a  $(D)$  se le denomina operador diferencial de tiempo, y tiene el significado siguiente:  $D^k = \frac{\partial^k}{\partial t^k}$

Por lo tanto,  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $Q_1$ ,  $Q_2$  son polinomios de grado  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $m_1$ ,  $m_2$  en  $D$  que por equivalencia con las ecuaciones (1-17), y (1-18) representan lo siguiente:

$$P_1(D) = \sum_{k=0}^{n_1} a_k \frac{\partial^k}{\partial t^k} \quad Q_1(D) = \sum_{k=0}^{m_1} b_k \frac{\partial^k}{\partial t^k}$$

$$P_2(D) = \sum_{k=0}^{n_2} c_k \frac{\partial^k}{\partial t^k} \quad Q_2(D) = \sum_{k=0}^{m_2} d_k \frac{\partial^k}{\partial t^k}$$

No todo polinomio del tipo mostrado puede representar un sistema físicamente realizable. La termodinámica y las condiciones iniciales, imponen algunas restricciones como veremos en el siguiente sub capítulo. Es importante además no perder de vista que  $\sigma'_{ij}$ ,  $\sigma_{kk}$ ,  $e'_{ij}$  y  $e_{kk}$  son funciones del punto  $(x_1, x_2, x_3)$  y del tiempo  $t$ .

## 1.4 Empleo de las transformaciones de Laplace en el cálculo de la respuesta viscoelástica

### 1.4.1 La transformada de Laplace y su utilidad

En el cálculo de la respuesta viscoelástica, está involucrada la solución de ecuaciones diferenciales e integrales de convolución con respecto al tiempo. Las funciones involucradas en estos problemas tienen valores igual a cero para  $t < 0$ .

La transformada de Laplace de las ecuaciones diferenciales de un medio viscoelástico permite pasarlas del dominio del tiempo (variable  $t$ ) al dominio de la variable algebraica  $s$  de Laplace. Se obtiene así una funciones algebraicas en  $s$  representadas por  $\bar{G}$  y  $\bar{K}$  del módulo de corte y del módulo volumétrico y de sus combinaciones. En particular de  $\bar{\nu}$ . De este modo la solución de un cierto problema cuasi estático en un medio viscoelástico consiste simplemente en:

- Determinar la solución del mismo problema en un medio elástico.
- Sustituir en la solución elástica las variables que dependen del tiempo (cargas, corrimientos y parámetros elásticos  $G$  y  $\nu$  por sus transformadas en la variable  $s$  de Laplace.
- Encontrar la anti transformada de Laplace, de la solución algebraica en  $s$  para pasar de nuevo al dominio del tiempo  $t$ .

La transformada de Laplace de una función  $f(t)$ , se define como:

$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \bar{f}(s)$$

### 1.4.2 Propiedades interesantes

Se obtiene ventaja de esta transformación, gracias a que tiene propiedades que son aplicables a las ecuaciones de la viscoelasticidad. Aplicación que es posible debido a la linealidad de las últimas.

Son de gran utilidad las siguientes propiedades:

$$L\left\{\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right\} = \bar{f}(s) \cdot \bar{g}(s) \quad (1-21)$$

La expresión anterior indica que la transformada de la integral de la convolución de las funciones  $f(t-\tau)$  y  $g(\tau)$ , es el producto de las transformadas de las funciones  $f(t)$  y  $g(t)$ . Propiedad que es útil cuando las relaciones tensión-deformación de la viscoelasticidad se expresan a través de la integral de convolución.

$$L\left\{\frac{\partial^n}{\partial t^n} f(t)\right\} = s^n \bar{f}(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} \frac{\partial^{k-1}}{\partial t^{k-1}} f(0^+) \quad (1-22)$$

Propiedad que es útil cuando las relaciones tensión deformación de la viscoelásticidad se expresan en forma de ecuaciones diferenciales.

## 1.5 Equivalencias entre los términos de las ecuaciones integrales y diferenciales

### 1.5.1 Transformadas de las relaciones tensión - deformación expresadas en forma de integral de convolución

Valiéndonos de las propiedades mostradas en el párrafo anterior. Las transformadas de las relaciones tipo relajación, indicadas por las ecuaciones (1-12) y (1-13) son:

$$\text{En corte:} \quad \bar{\sigma}'_{ij}(s) = s\bar{G}_1(s)\bar{e}'_{ij}(s) \quad (1-23)$$

$$\text{En compresión isotropa:} \quad \bar{\sigma}_{kk}(s) = s\bar{G}_2(s)\bar{e}_{kk}(s) \quad (1-24)$$

Del mismo modo las transformadas de las relaciones tipo fluencia, indicadas por las ecuaciones (1-15) y (1-16) son:

$$\text{En corte:} \quad \bar{e}'_{ij}(s) = s\bar{J}_1(s)\bar{\sigma}'_{ij}(s) \quad (1-25)$$

$$\text{En compresión isotropa:} \quad \bar{e}_{kk}(s) = s\bar{J}_2(s)\bar{\sigma}_{kk}(s) \quad (1-26)$$

De las ecuaciones en corte (1-23) y (1-25) se obtiene que:

$$s^2 \bar{G}_1 \bar{J}_1 = 1 \quad (1-27)$$

Y análogamente de las ecuaciones en compresión isotropa (1-24) y (1-26) se obtiene que:

$$s^2 \bar{G}_2 \bar{J}_2 = 1 \quad (1-28)$$

1.5.2 Transformadas de las relaciones tensión – deformación expresadas en forma de ecuaciones diferenciales

Empleando la segunda propiedad mostrada en el sub capítulo 1.4.2, las transformadas de las relaciones en corte (1-17) y en compresión isótropa (1-18) son:

$$\bar{P}_1(s)\bar{\sigma}'_{ij}(s) - \sum_{k=1}^{n_1} a_k \sum_{r=1}^k s^{r-1} \frac{\partial^{k-r}}{\partial t^{k-r}} \sigma'_{ij}(0^+) = \bar{Q}_1(s)\bar{e}'_{ij}(s) - \sum_{k=1}^{m_1} b_k \sum_{r=1}^k s^{r-1} \frac{\partial^{k-r}}{\partial t^{k-r}} e'_{ij}(0^+) \quad (1-29)$$

$$\bar{P}_2(s)\bar{\sigma}'_{kk}(s) - \sum_{k=1}^{n_2} c_k \sum_{r=1}^k s^{r-1} \frac{\partial^{k-r}}{\partial t^{k-r}} \sigma'_{kk}(0^+) = \bar{Q}_2(s)\bar{e}'_{kk}(s) - \sum_{k=1}^{m_2} d_k \sum_{r=1}^k s^{r-1} \frac{\partial^{k-r}}{\partial t^{k-r}} e'_{kk}(0^+) \quad (1-30)$$

Siendo:

$$\bar{P}_1(s) = \sum_{k=0}^{n_1} a_k s^k,$$

$$\bar{Q}_1(s) = \sum_{k=0}^{m_1} b_k s^k$$

$$\bar{P}_2(s) = \sum_{k=0}^{n_2} c_k s^k$$

$$\bar{Q}_2(s) = \sum_{k=0}^{m_2} d_k s^k$$

Como podemos apreciar, los segundos términos de cada uno de los miembros de las ecuaciones (1-29), y (1-30) son las relaciones entre los valores y sus derivadas de la tensión y la deformación inicial en  $t = 0^+$ .

Siempre que:

$$\sum_{k=1}^{n_1} a_k \sum_{r=1}^k s^{r-1} \frac{\partial^{k-r}}{\partial t^{k-r}} \sigma'_{ij}(0^+) = \sum_{k=1}^{m_1} b_k \sum_{r=1}^k s^{r-1} \frac{\partial^{k-r}}{\partial t^{k-r}} e'_{ij}(0^+) \quad (1-31)$$

$$\sum_{k=1}^{n_2} c_k \sum_{r=1}^k s^{r-1} \frac{\partial^{k-r}}{\partial t^{k-r}} \sigma'_{kk}(0^+) = \sum_{k=1}^{m_2} d_k \sum_{r=1}^k s^{r-1} \frac{\partial^{k-r}}{\partial t^{k-r}} e'_{kk}(0^+) \quad (1-32)$$

Las ecuaciones diferenciales en corte (1-29), y en compresión volumétrica (1-30), se pueden simplificar a:

$$\bar{P}_1(s)\bar{\sigma}'_{ij}(s) = \bar{Q}_1(s)\bar{e}'_{ij}(s) \quad (1-33)$$

$$\bar{P}_2(s)\bar{\sigma}_{kk}(s) = \bar{Q}_2(s)\bar{e}_{kk}(s) \quad (1-34)$$

Este sistema de ecuaciones es equivalente al sistema integral de tipo relajación formado por las ecuaciones (1-23) y (1-24), y por lo tanto se puede escribir que:

$$\frac{\bar{Q}_1(s)}{\bar{P}_1(s)} = s\bar{G}_1 \quad (1-35)$$

$$\frac{\bar{Q}_2(s)}{\bar{P}_2(s)} = s\bar{G}_2 \quad (1-36)$$

Análogamente este sistema de ecuaciones es equivalente al sistema integral tipo fluencia formado por las ecuaciones (1-25) y (1-26), y se puede escribir que:

$$\frac{\bar{P}_1(s)}{\bar{Q}_1(s)} = s\bar{J}_1 \quad (1-37)$$

$$\frac{\bar{P}_2(s)}{\bar{Q}_2(s)} = s\bar{J}_2 \quad (1-38)$$

Solo cuando se cumplen <sup>las</sup> estas condiciones, <sup>(1-37) y (1-32)</sup> el sistema diferencial es equivalente al integral, y las ecuaciones diferenciales pueden representar un cuerpo físico real, <sup>Podría ser -V/t</sup> Mas adelante se tratará esta equivalencia con mayor detalle. A continuación se presenta el razonamiento, según el cual algunos autores han deducido que las igualdades (1-31) y (1-32) se cumplen cuando hay un salto en las funciones en  $t = 0$ .



### 1.5.3 Condiciones de contorno en $t=0^+$

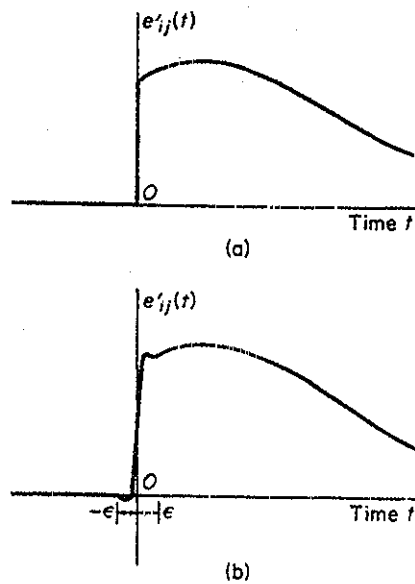


Fig 1.3: Allanamiento del salto de la función  $e'_{ij}(t)$

Para el caso particular que nos ocupa, los valores de las tensiones y deformaciones son igual a cero en  $-\infty < t < 0$ , sin embargo sus valores no son cero cuando  $t \rightarrow 0$  desde el lado positivo del tiempo. Es decir hay un salto en estas funciones como se aprecia en la Fig. 1.3: Por condición de continuidad, las relaciones tensión deformación (1-17) y (1-18) siguen siendo válidas, en el intervalo  $-\epsilon < t < \epsilon$ , en el que  $\epsilon \rightarrow 0$ . Estas relaciones tensión deformación aplicadas a este intervalo son:

$$\text{En corte:} \quad \sum_{k=0}^N a_k \frac{\partial^k}{\partial t^k} \sigma'_{ij}(t, \epsilon) = \sum_{k=0}^N b_k \frac{\partial^k}{\partial t^k} e'_{ij}(t, \epsilon) \quad (1-39)$$

$$\text{En compresión isotropa:} \quad \sum_{k=0}^N c_k \frac{\partial^k}{\partial t^k} \sigma_{kk}(t, \epsilon) = \sum_{k=0}^N d_k \frac{\partial^k}{\partial t^k} e_{kk}(t, \epsilon) \quad (1-40)$$

En las que se han reemplazado  $n_1, n_2, m_1, m_2$  por  $N$  que sería el mayor de ellos en cada ecuación: Para que se cumplan todas las condiciones algunos de los coeficientes  $a_k, b_k, c_k$  y  $d_k$  se reemplazarán por cero.

Integrando con respecto al tiempo estas ecuaciones en el intervalo  $(-\varepsilon, \varepsilon)$  se obtiene:

En corte:

$$\sum_{k=1}^N a_k \frac{\partial^{k-1}}{\partial t^{k-1}} \sigma'_{ij}(t, \varepsilon) + a_0 \int_{-\varepsilon}^t \sigma'_{ij}(\tau, \varepsilon) d\tau = \sum_{k=1}^N b_k \frac{\partial^{k-1}}{\partial t^{k-1}} e'_{ij}(t, \varepsilon) + b_k \int_{-\varepsilon}^t e'_{ij}(\tau, \varepsilon) d\tau \quad (1-41)$$

Al tomar  $t = \varepsilon$ , teniendo presente que  $\varepsilon \rightarrow 0$ , la integral desaparece y esta expresión queda como:

$$\sum_{k=1}^N a_k \frac{\partial^{k-1}}{\partial t^{k-1}} \sigma'_{ij}(0^+) = \sum_{k=1}^N b_k \frac{\partial^{k-1}}{\partial t^{k-1}} e'_{ij}(0^+) \quad (1-42)$$

La cual es una de las condiciones iniciales indicadas por los segundos miembros de la ecuación(1-29) en concreto la correspondiente a  $r = 1$ . Integraciones sucesivas nos proporcionarán las  $N$  condiciones iniciales. Esto significa que los segundos miembros de esta ecuación son iguales y se anulan entre si, quedando reducida a:

$$\bar{P}_1(s) \bar{\sigma}'_{ij}(s) = \bar{Q}_1(s) \bar{e}'_{ij}(s) \quad (1-43)$$

Haciendo el mismo tratamiento para las relaciones tensión deformación en compresión volumétrica la ecuación (1-30) se reduce a:

$$\bar{P}_2(s) \bar{\sigma}_{kk}(s) = \bar{Q}_2(s) \bar{e}_{kk}(s) \quad (1-44)$$

#### 1.5.4 Equivalencia entre las relaciones tensión-deformación expresadas en forma de ecuaciones integrales y diferenciales

El que la expresión polinómica (1-43) sea equivalente a la ecuación integral de tipo relajación (1-23) o integral de tipo fluencia (1-25) dependerá de los exponentes  $n_1$  y  $m_1$  de sus polinomios  $\bar{P}_1(s)$  y  $\bar{Q}_1(s)$ . Si  $n_1 > m_1$ , es equivalente con la relación de tipo relajación. En caso contrario con la relación de tipo fluencia. Esto es así debido a que un polinomio en  $s$ , no tiene antitransformada continua de Laplace. La transformada inversa de  $s$ , es la función impulso  $\delta(t)$ , y de  $s^2$  y  $s^3$  son singularidades de orden mayor, esto quiere decir funciones impulso o Delta de Dirac de orden superior. Por lo tanto:

Si  $n_1 > m_1$  por equivalencia entre la ecuación (1-43), y (1-23), la expresión polinómica de la transformada de la función de tipo relajación, en corte, será:

$$\bar{G}_1(s) = \frac{\bar{Q}_1(s)}{s\bar{P}_1(s)} \quad (1-45)$$

Por el contrario si  $n_1 \leq m_1$ , por equivalencia entre la ecuación (1-43) y (1-25), la expresión polinómica de la transformada de la función de tipo fluencia, en corte, será:

$$\bar{J}_1(s) = \frac{\bar{P}_1(s)}{s\bar{Q}_1(s)} \quad (1-46)$$

La conveniencia de esta equivalencia, es representar las funciones reológicas como polinomios del tipo aquí visto.

A través de un tratamiento similar se puede hallar la equivalencia en compresión isótropa.

## 1.6 Medios viscoelásticos

### 1.6.1 Planteamiento general

Los problemas en la teoría de la viscoelasticidad lineal, usualmente se plantean para hallar los desplazamientos ( $u_i$ ), las deformaciones ( $e_{ij}$ ), y las tensiones ( $\sigma_{ij}$ ) en un medio sometido a determinadas condiciones de contorno y condiciones iniciales. Las cuales pueden ser fuerzas del cuerpo por unidad de volumen ( $X_i$ ), tensiones ( $f_i$ ) o desplazamientos ( $g_i$ ).

Con excepción de las relaciones constitutivas, las demás ecuaciones empleadas son las de la teoría de la elasticidad lineal.

El tratamiento presentado a continuación está restringido a desplazamientos infinitesimales de materiales viscoelásticos, homogéneos e isotropos en condiciones de conservación de la masa. Como bien sabemos en mecánica, el movimiento de los cuerpos depende de sus relaciones constitutivas, de sus condiciones de contorno y de sus condiciones iniciales. Por este motivo se declaran a continuación.

#### Definición de la deformación:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(e_{i,j} + e_{j,i}) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1-47)$$

Siendo:

$u_{i,j}$ : La derivada parcial de la deformación en la dirección del eje  $i$  con respecto al eje  $j$ . Y lo mismo para el caso de  $u_{j,i}$  con los cambios correspondientes.

#### Condición de continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} \right) = 0 \quad (1-48)$$

Siendo:

$\rho$ : La densidad de masa del material.

#### Equilibrio dinámico:

$$\sigma_{ij,j} + X_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (1-49)$$

Relaciones constitutivas:

Las ecuaciones constitutivas en su forma integral de tipo relajación serán:

En corte: 
$$\sigma'_{ij} = e'_{ij} * dG_1 = G_1 * de'_{ij} \quad (1-50)$$

En compresión isótropa:

$$\sigma_{kk} = e_{kk} * dG_2 = G_2 * de_{kk} \quad (1-51)$$

Siendo: 
$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} \quad y \quad e'_{ij} = e_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} e_{kk} \quad (1-52)$$

Y las relaciones constitutivas en su forma integral de tipo fluencia serán:

En corte: 
$$e'_{ij} = \sigma'_{ij} * dJ_1 = J_1 * d\sigma'_{ij} \quad (1-53)$$

En compresión isótropa:

$$e_{kk} = \sigma_{kk} * dJ_2 = J_2 * d\sigma_{kk} \quad (1-54)$$

En su forma diferencial las relaciones constitutivas serán:

En corte: 
$$P_1(D)\sigma'_{ij} = Q_1(D)e'_{ij} \quad (1-55)$$

En compresión volumétrica: 
$$P_2(D)\sigma_{kk} = Q_2(D)e_{kk} \quad (1-56)$$

Debemos tener presente que las funciones aquí presentadas, son independientes de la posición del punto en estudio solamente cuando se trata de materiales homogéneos.

Condiciones de contorno:

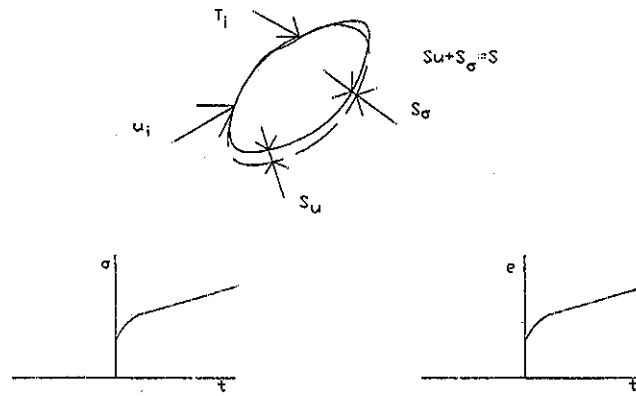


Fig 1 4: Condiciones de contorno y condiciones iniciales

Como habíamos mencionado en el planteamiento general, las condiciones de contorno podrían tomar la forma de tensiones aplicadas sobre la superficie  $S_\sigma$ :

$$T_i = \sigma_{ij} v_j = f_i$$

Expresión en la que  $v_j$ , es el valor unitario normal hacia afuera de la superficie.

O podría tomar la forma de desplazamientos ocurridos sobre la superficie  $S_u$ :

$$u_i = g_i$$

Por lo tanto;  $f_i$  y  $g_i$ , serán funciones que dependerán de su posición y el tiempo y  $S_\sigma + S_u = S$  será la superficie total del cuerpo.

Para  $-\infty < t < 0$ :  $u_i = e_{ij} = \sigma_{ij} = 0$

Estas condiciones implícitamente nos indican que las variaciones de los desplazamientos y de las tensiones también son cero en  $t=0^-$ .

Esta condición se puede indicar con las siguientes expresiones:

$$\frac{\partial e_{kl}}{\partial t} = \frac{\partial \sigma'_{kl}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial e_{kk}}{\partial t} = \frac{\partial \sigma'_{kk}}{\partial t} = 0$$

Para  $t = 0^+$ :

En los problemas que se plantean normalmente existe un salto en las condiciones, en este valor del tiempo. En estas circunstancias, las condiciones iniciales de deformaciones serían:  $e'_{ij}(0^+)$ ,  $\frac{\partial e'_{ij}}{\partial t}(0^+)$ , ...,  $\frac{\partial^n e'_{ij}}{\partial t^n}(0^+)$ , y las condiciones iniciales de tensiones serían:  $\sigma'_{ij}(0^+)$ ,  $\frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial t}(0^+)$ , ...,  $\frac{\partial^n \sigma'_{ij}}{\partial t^n}(0^+)$ , las cuales deben estar relacionadas por las siguientes condiciones:

$$\sum_{k=r}^n a_k \frac{\partial^{k-r}}{\partial t^{k-r}} \sigma'_{ij}(0^+) = \sum_{k=r}^n b_k \frac{\partial^{k-r}}{\partial t^{k-r}} e'_{ij}(0^+), \quad r = 1, 2, 3, \dots, n \quad (1-57)$$

Condiciones que por otra parte se pueden escribir matricialmente como:

$$[A][D] \sigma(0^+) = [B][D] e(0^+)$$

Siendo

$$[A] = [a_n \ a_{n-1} \ \dots \ a_1 \ a_0], \quad [B] = [b_n \ b_{n-1} \ \dots \ b_1 \ b_0]$$

$$[D] = \begin{bmatrix} D^0 & D^1 & \dots & D^{n-2} & D^{n-1} \\ & D^0 & D^1 & \dots & D^{n-2} \\ & & D^0 & \dots & D^{n-2} \\ & & & \dots & D^1 \\ & & & & D^0 \end{bmatrix}^c$$

$$D^n = \frac{\partial}{\partial t^n}$$

Para  $t > 0$ :

$u_i = g_i$ ,  $T_i = \sigma_{ij} \nu_j = f_i$  siendo  $g_i$ ,  $f_i$ , funciones sobre  $S_u$  y  $S_\sigma$  y dependerán del tiempo y la posición.

Finalmente, se debe mencionar que a la identificación de un problema lineal elástico con otro viscoelástico lineal, al cual se le ha aplicado la transformación de Laplace se le llama el principio de correspondencia.

### 1.6.2 Caso cuasi estático

Un problema se puede tratar como cuasi estático, si la variación de la carga es muy lenta. Gracias a ello las fuerzas de inercia se podrían despreciar y tratar el problema como estático.

Además si todas sus funciones, desaparecen para valores de  $t < 0$ , y tienen transformadas de Laplace en  $0 \leq t < \infty$ . Sus expresiones del planteamiento del problema serán las mismas que las de la teoría de la elasticidad lineal.

Empleando la transformación de Laplace, las expresiones de deformación (1-47) y equilibrio dinámico (1-49) son:

$$\bar{e}_{ij} = \frac{1}{2}(\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i}) \quad (1-61)$$

$$\bar{\sigma}'_{ij,j} + \bar{X}_i = 0 \quad (1-62)$$

Las transformadas de Laplace de las expresiones integrales de tipo relajación: en distorsión angular (1-23), en deformación volumétrica (1-24), y de tipo fluencia en distorsión angular (1-25), y en deformación volumétrica (1-26) son:

$$\bar{\sigma}'_{ij} = s\bar{G}_1(s)\bar{e}'_{ij}$$

$$\bar{\sigma}_{kk} = s\bar{G}_2(s)\bar{e}_{kk}$$

$$\bar{e}'_{ij} = s\bar{J}_1(s)\bar{\sigma}'_{ij}$$

$$\bar{e}_{kk} = s\bar{J}_2(s)\bar{\sigma}_{kk}$$

Del mismo modo, las transformadas de las relaciones diferenciales en distorsión angular (1-43), y en deformación volumétrica (1-44) son:

$$\bar{P}_1(s)\bar{\sigma}'_{ij} = \bar{Q}_1(s)\bar{e}'_{ij}$$

$$\bar{P}_2(s)\bar{\sigma}_{kk} = \bar{Q}_2(s)\bar{e}_{kk}$$



Y por equivalencia entre las ecuaciones constitutivas en forma integral y diferencial, las funciones de relajación en distorsión angular y en deformación volumétrica se pueden escribir del siguiente modo:

$$2\bar{G}(s) = \frac{\bar{Q}_1(s)}{P_1(s)} = s\bar{G}_1 = \frac{1}{sJ_1} \quad (1-63)$$

$$3\bar{K}(s) = \frac{\bar{Q}_2(s)}{P_2(s)} = s\bar{G}_2 = \frac{1}{sJ_2} \quad (1-64)$$

Por lo tanto la transformada del módulo de Poisson viscoelástico será:

$$\bar{\nu} = \frac{3\bar{K}(s) - 2\bar{G}(s)}{2(3\bar{K}(s) + \bar{G}(s))} \quad (1-65)$$

Finalmente, las expresiones de las transformadas de las condiciones de contorno son:

$$\bar{u}_i = \bar{g}_i \quad \bar{\sigma}_i = \bar{f}_i$$

Con estas transformaciones, el problema es trasladado al dominio del álgebra, y una vez hallados:  $\bar{u}_i, \bar{e}_{ij}, \bar{\sigma}_{ij}$  para las condiciones  $\bar{X}_i, \bar{f}_i, \bar{g}_i$  dadas. Se podría hallar la solución en el dominio del tiempo realizando la transformación inversa.

### 1.6.3 Ejemplos de casos cuasiestáticos

#### Ejemplo 1: Túnel circular sin sostenimiento con simetría axial

Se pretende calcular la evolución de la convergencia a lo largo del tiempo a partir del instante  $t = 0^+$ , en el que la galería se ha excavado de golpe.

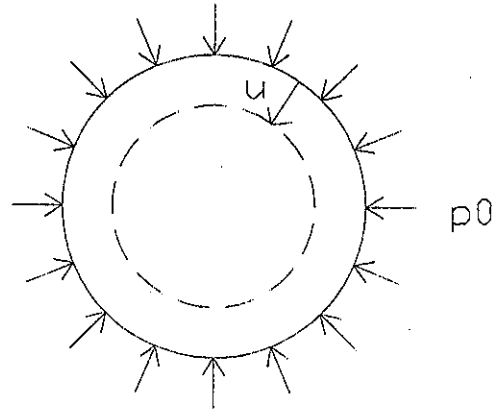


Fig. 1 5: Geometría del ejemplo

#### Cargas:

Carga vertical:  $p_v = p_0$ , constante.

Carga horizontal:  $p_H = p_0$ , coeficiente  $k_0 = 1$ , constante.

#### Relaciones constitutivas viscoelásticas:

En distorsión angular:  $\sigma'_{ij} = 2G\varepsilon'_{ij} + \eta \dot{\varepsilon}'_{ij}$  (modelo de Kelvin)

En deformación volumétrica:  $\sigma_{kk} = 3K\varepsilon_{kk}$  (modelo de Hooke).

#### Convergencia elástica:

$$\frac{u}{a} = \frac{p_0}{2G} \quad (1-66)$$

#### Transformadas de las variables dependientes del tiempo:

Distorsión:  $\bar{\sigma}'_{ij} = (2G + \eta s) \bar{\varepsilon}'_{ij}$

Deformación volumétrica:  $\bar{\sigma}_{kk} = 3K \bar{\varepsilon}_{kk}$

Convergencia viscoelástica:

$$\frac{\bar{u}}{a} = \frac{1}{2Gs} p_0 \quad (1-67)$$

Reemplazando el módulo de corte viscoelástico de esta ecuación, por su expresión en función de las constantes reológicas, se obtiene que:

$$\frac{\bar{u}}{a} = \frac{1}{2Gs} p_0 = \frac{1}{(2G + \eta s)s} p_0 = \bar{\phi}(s) p_0 \quad (1-68)$$

$$\bar{\phi}(s) = \frac{1}{2Gs} = \int_0^{\infty} e^{-st} \phi(t) dt$$

$$\bar{\phi}(s) = \frac{1}{(2G + \eta s)s} = \frac{1}{2G} \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{\frac{2G}{\eta} + s} \right)$$

$$\phi(t) = \frac{1}{2G} \left( 1 - e^{-\frac{2G}{\eta} t} \right)$$

$$u(t) = \frac{p_0 a}{2G} \left[ 1 - e^{-\frac{2G}{\eta} t} \right]$$

Geometría:

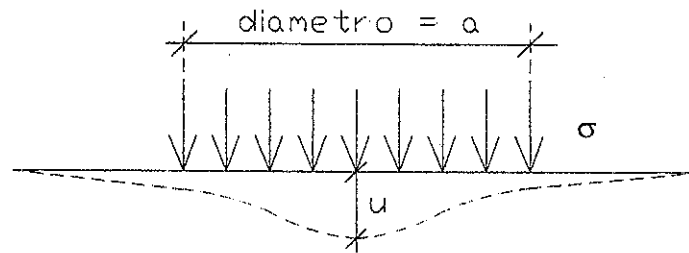


Fig. 1 6: Carga uniformemente distribuida sobre una superficie circular en un semiespacio viscoelástico.

Relaciones constitutivas viscoelásticas:

En distorsión angular:  $\sigma'_{ij} = 2G\varepsilon'_{ij} + \eta \dot{\varepsilon}'_{ij}$  (modelo de Kelvin)

En deformación volumétrica:  $\sigma_{kk} = 3K\varepsilon_{kk}$  (modelo de Hooke).

Expresión del asiento en el centro del área cargada:

$$\frac{u}{2a} = \frac{(1-\nu^2)}{E} \sigma = \frac{(1-\nu)(1+\nu)}{E} \sigma = \sigma \left[ \frac{1-\nu}{2G} \right] \quad (1-69)$$

Transformadas de las variables dependientes del tiempo:

Distorsión:  $\bar{\sigma}'_{ij} = (2G + \eta s) \bar{\varepsilon}'_{ij}$

Deformación volumétrica:  $\bar{\sigma}_{kk} = 3K \bar{\varepsilon}_{kk}$

Ejemplo 2: Carga uniformemente distribuida sobre una superficie circular en un semiespacio viscoelástico.

## 1.7 Túneles en medios viscoelásticos

### 1.7.1 Geometría y cargas

#### 1.7.1.1 Geometría

Trataremos el caso de un túnel circular de radio "a" ubicado a gran profundidad. Por conveniencia empleamos coordenadas polares, con el polo ubicado en el eje del túnel. Los ángulos los medimos a partir de la horizontal y son positivos al ser medidos en sentido antihorario.

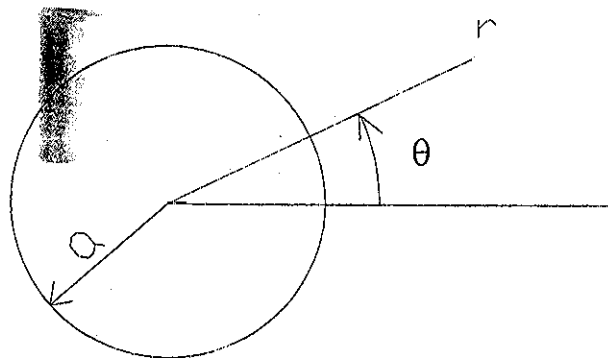


Fig 1.7: Geometría

### Parámetros viscoelásticos

$$\text{Módulo de rigidez transversal: } \overline{2G} = \frac{\overline{Q}_1(s)}{\overline{P}_1(s)} = 2G + \eta s$$

$$\text{Módulo de compresibilidad: } \overline{3K} = \frac{\overline{Q}_2(s)}{\overline{P}_2(s)} = 3K$$

$$\text{Coeficiente de Poisson: } \overline{\nu}(s) = \frac{\overline{3K} - \overline{2G}}{\overline{6K} + \overline{2G}} = \frac{3K - 2G - \eta s}{6K + \eta s + 2G}$$

$$1 - \overline{\nu}(s) = \frac{6K + \eta s + 2G - 3K + 2G + \eta s}{6K + \eta s + 2G} = \frac{3K + 4G + 2\eta s}{6K + \eta s + 2G}$$

$$\frac{1 - \overline{\nu}(s)}{2G} = \frac{3K + 4G + 2\eta s}{6K + \eta s + 2G} \frac{1}{2G + \eta s}$$

### Asiento viscoelástico:

Al reemplazar esta expresión en la transformada de la ecuación constitutiva (1-69), y teniendo presente que  $\sigma$  es constante, se obtiene que:

$$\frac{\overline{u}}{2a} = \frac{1 - \overline{\nu}}{2G} \sigma \quad (1-70)$$

$$\frac{\overline{u}}{2a} = \left( \frac{1}{s} \frac{3K + 4G + 2\eta s}{6K + 2G + \eta s} \frac{1}{2G + \eta s} \right) \sigma = \left( \frac{A}{s} + \frac{B}{6K + 2G + \eta s} + \frac{C}{2G + \eta s} \right) \sigma = \overline{\phi}(t) \sigma$$

### Valoración del asiento en el tiempo:

$$u(t) = 2a \left( \frac{3K + 4G}{4G(3K + G)} + \frac{3}{4(3K + G)} e^{-\frac{2(3K+G)}{\eta} t} - \frac{1}{4G} e^{-\frac{2G}{\eta} t} \right) \sigma$$

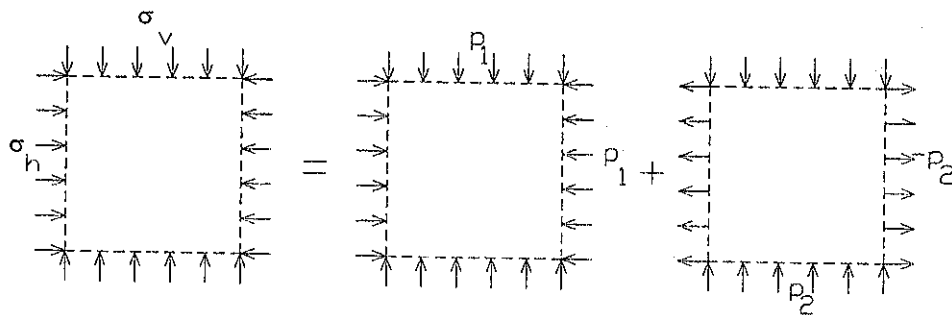
### 1.7.1.2 Cargas

En un sistema biaxial. Las cargas existentes antes de la apertura del túnel, son:

Carga vertical, y horizontal debido al terreno de cobertura:  $\sigma_v$ ,  $\sigma_h$  respectivamente.

El coeficiente de empuje del terreno en reposo se expresa con:  $K_0 = \frac{\sigma_h}{\sigma_v}$

Este sistema de cargas  $\sigma_v$ ,  $\sigma_h$ , es equivalente a la suma del sistema simétrico y antimétrico mostrado:



$$p_1 = \frac{\sigma_v + \sigma_H}{2}$$

$$p_2 = \frac{\sigma_v - \sigma_H}{2}$$

Fig. 1.8: Sistemas equivalentes de carga



## 1.7.2 Solución elástica

## 1.7.2.1 Corrimientos – expresión convencional

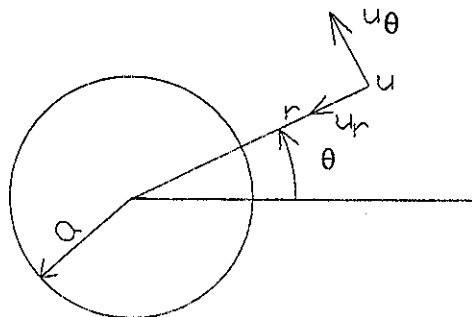


Fig. 1 9: Dirección de los corrimientos

En el sistema de coordenadas mostrado en la Fig. 1.9.; el corrimiento en un punto M de coordenadas  $(r, \theta)$ , tendrá las siguientes componentes:

$u_\theta$  : Componente tangencial.

$u_r$  : Componente radial.

Componentes que se expresan con las siguientes formulaciones:

$$\frac{2Gr u_r}{a^2 \sigma_v} = \frac{1+K_0}{2} - \frac{1-K_0}{2} \left[ 4(1-\nu) - \frac{a^2}{r^2} \right] \cos 2\theta \quad (1-71)$$

$$\frac{2Gr u_\theta}{a^2 \sigma_v} = \frac{1-K_0}{2} \left[ 2(1-2\nu) + \frac{a^2}{r^2} \right] \text{sen} 2\theta \quad (1-72)$$

y se pueden poner de la siguiente forma:

$$\frac{2Gr}{a^2} u_r = p_1 - p_2 \left[ 2(1-2\nu) + 2 - \frac{a^2}{r^2} \right] \cos 2\theta \quad (1-73)$$

$$\frac{2Gr}{a^2} u_\theta = p_2 \left[ 2(1-2\nu) + \frac{a^2}{r^2} \right] \text{sen} 2\theta \quad (1-74)$$

### 1.7.2.2 Corrimientos- expresión matricial

La forma matricial de las expresiones (1-73) y (1-74) será:

$$\frac{2Gr}{a^2} \begin{bmatrix} u_r \\ u_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \left(\frac{a^2}{r^2} - 2\right) \cos 2\theta \\ 0 & \frac{a^2}{r^2} \operatorname{sen} 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} + 2(1-2\nu) \begin{bmatrix} 0 & -\cos 2\theta \\ 0 & \operatorname{sen} 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \quad (1-75)$$

La misma que en forma compacta es:

$$\frac{2Gr}{a^2} [u] = [U_0][p] + 2(1-2\nu)[U_u][p] \quad (1-76)$$

Cuando las cargas se colocan después de la apertura del túnel, los términos a añadir son:

$$[U_0]^A = \frac{r^2}{a^2} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & \operatorname{sen} 2\theta \end{bmatrix} \quad (1-77)$$

$$[U_u]^A = \frac{r^2}{2a^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \quad (1-78)$$

### 1.7.3 Solución viscoelástica

#### 1.7.3.1 Solución general

Como hemos visto el corrimiento elástico en deformación plana viene dado por la expresión (1-76). Expresión que es válida para un cuerpo viscoelástico, debido a que la distribución de tensiones es la misma. Aplicando la transformación de Laplace a esta ecuación obtenemos la siguiente expresión:

$$\frac{2Gr}{a^2} [\bar{u}] = [U_0] [p] + 2(1-2\nu) [U_u] [p] \quad (1-79)$$

Considerando a "p" constante, la transformación de Laplace nos permite escribir esta expresión del modo siguiente:

$$\frac{r}{a^2} [\bar{u}] = \frac{[U_0] [p]}{2G_s} + 2 \frac{1-2\nu}{2G_s} [U_u] [p] \quad (1-80)$$

Reemplazando la expresión (1-65) de la transformada del módulo de Poisson, en la expresión anterior y haciendo el desarrollo correspondiente, la expresión de la convergencia viscoelástica también se puede escribir como:

$$\frac{r}{a^2} [\bar{u}] = \frac{1}{2G_s} [U_0] [p] + \frac{3}{(3K+G)_s} [U_u] [p] \quad (1-81)$$

Finalmente, invirtiendo la transformación de Laplace, esta expresión se puede escribir del modo siguiente:

$$\frac{r}{a^2} [u] = [U_0] [p] \phi_0(t) + [U_u] [p] \phi_u(t) \quad (1-82)$$

Siendo:  $\frac{1}{2G_s} = \int_0^{\infty} \phi_0(t) e^{-st} dt$ , y  $\frac{3}{(3K+G)_s} = \int_0^{\infty} \phi_u(t) e^{-st} dt$

### 1.7.3.2 Soluciones particulares

Sabemos que los medios viscoelásticos quedan definidos a través de una ecuación integral (convolutiva) o diferencial. En este último caso, aplicando la transformada de Laplace a la forma diferencial, obtenemos:

Para la distorsión angular:

$$\bar{e}_{ij} \sum_{k=0}^{k=n_1} a_k s^k = \bar{\sigma}_{ij} \sum_{k=0}^{k=m_1} b_k s^k \quad (1-83)$$

Y para el cambio volumétrico:

$$\bar{e}_{kk} \sum_{k=0}^{k=n_2} c_k s^k = \bar{\sigma}_{kk} \sum_{k=0}^{k=m_2} d_k s^k \quad (1-84)$$

Por equivalencia con las formulaciones (1-23), (1-24), (1-43) y (1-44) los parámetros reológicos en corte y en deformación volumétrica se pueden expresar a través de las siguientes expresiones:

$$\frac{1}{2G} = \frac{\sum_{k=0}^{k=n_1} a_k s^k}{\sum_{k=0}^{k=m_1} b_k s^k} \quad (1-85)$$

$$\frac{1}{3K} = \frac{\sum_{k=0}^{k=n_2} c_k s^k}{\sum_{k=0}^{k=m_2} d_k s^k} \quad (1-86)$$

Por lo tanto:

$$\frac{1}{2Gs} = \frac{\sum_{k=0}^{k=n_1} a_k s^k}{s \sum_{k=0}^{k=m_1} b_k s^k} = \int_0^{\infty} \phi_0(t) e^{-st} dt \quad (1-87)$$

$$\frac{1}{(3\bar{K} + \bar{G})s} = \frac{2 \sum_{k=0}^{k=m_2} a_k s^k \sum_{k=0}^{k=m_1} c_k s^k}{s \left( 2 \sum_{k=0}^{k=m_1} d_k s^k \sum_{k=0}^{k=n_2} a_k s^k + \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{k=n_1} b_k s^k \sum_{k=0}^{k=m_2} c_k s^k \right)} \quad (1-88)$$

Al ser las expresiones formales, de los parámetros reológicos, racionales se podrán expresar en fracciones simples.

## 1.8 Modelos reológicos propuestos de respuesta viscoelástica lineal

Hemos visto que empleando la transformación de Laplace, la expresión formal de la convergencia en un túnel es:

$$\frac{r[u]}{a^2} = \frac{[p]}{2G} [U_0] + 2 \frac{1-2\nu}{2G} [p] [U_u] \quad (1-89)$$

Si "p" es constante:  $[p] = \frac{[p]}{s}$ , tenemos que:

$$\frac{r}{a^2} [u] = [p] [U_0] \bar{\phi}_0(s) + 2 [p] [U_u] \bar{\phi}_u(s) \quad (1-90)$$

Siendo:

$$\bar{\phi}_0(s) = \frac{1}{2Gs} = \frac{\bar{P}_1(s)}{sQ_1(s)} \quad (1-91)$$

$$\bar{\phi}_u(s) = \frac{1-2\nu}{2Gs} = \frac{3\bar{P}_1\bar{P}_2}{s(2\bar{P}_1\bar{Q}_2 + \bar{P}_2\bar{Q}_1)} \quad (1-92)$$

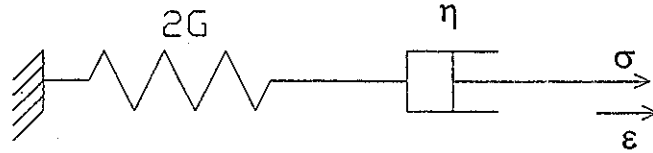
Estas funciones denominadas temporales en su forma integral son:

$$\bar{\phi}_0(s) = \int_0^{\infty} \phi_0(t) e^{-st} dt \quad \bar{\phi}_u(s) = \int_0^{\infty} \phi_u(t) e^{-st} dt$$

Hasta aquí, ya es posible darnos cuenta de que la expresión de estas funciones dependerá del material reológico que representa al macizo.

1.8.1.1.2 De dos elementos

Cuerpo de Maxwell (M):



Ec. diferencial:

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{2G} + \frac{\sigma}{\eta}$$

Funciones en s:

$$\bar{Q}_1(s) = s$$

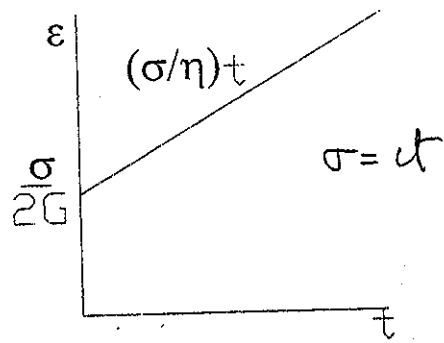
$$\bar{P}_1(s) = \frac{1}{\eta} + \frac{s}{2G}$$

Fluencia:

$$\epsilon = \frac{\sigma(t)}{2G} + \frac{1}{\eta} \int_0^t \sigma(t) dt$$

Caso  $\sigma(t) = ct$

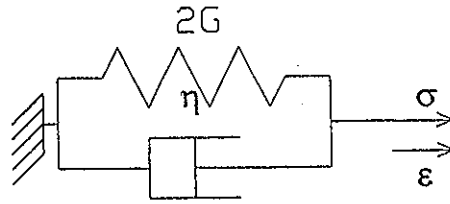
$$\epsilon = \left( \frac{1}{2G} + \frac{t}{\eta} \right) \sigma$$



Relajación

$$\frac{\sigma}{2G} = \epsilon(0^+) e^{-\frac{2G}{\eta} t} + \int_0^t e^{-\frac{2G}{\eta}(t-\tau)} d\epsilon$$

Cuerpo de Kelvin (K):



Ec. diferencial

$$2G\varepsilon + \eta \dot{\varepsilon} = \sigma$$

Funciones en S

$$\bar{Q}_1(s) = 2G + \eta s$$

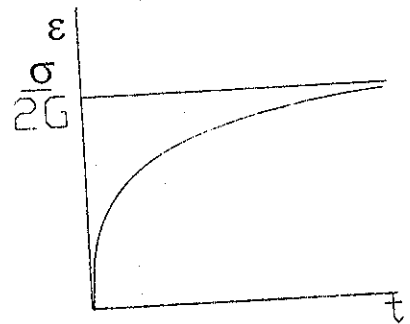
$$\bar{P}_1(s) = 1$$

Fluencia:

$$\varepsilon = \frac{1}{2G} \left[ \sigma(t) - \sigma_0 e^{-\frac{2G}{\eta} t} \right] - \frac{1}{2G} \int_0^t e^{-\frac{2G}{\eta} (t-\tau)} d\sigma$$

Caso  $\sigma = ct$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{2G} \left( 1 - e^{-\frac{2G}{\eta} t} \right)$$

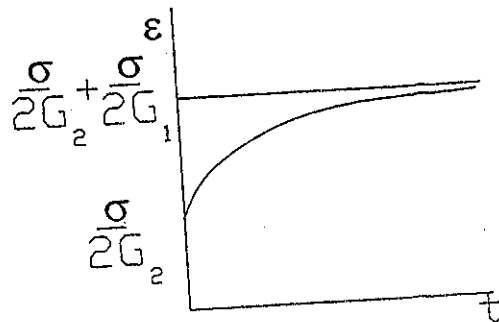
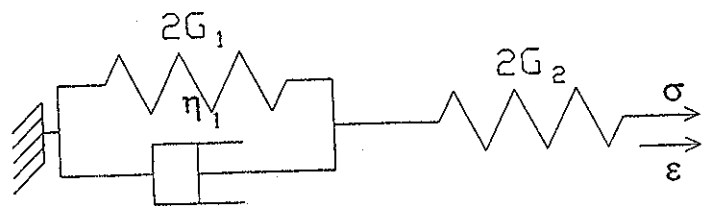


Relajación

$$\sigma = 2G \varepsilon(t) + \eta \dot{\varepsilon}(t)$$

1.8.1.1.3 De tres elementos

Combinación (EKS):



Ec. diferencial

$$2G_1 \varepsilon + \eta_1 \dot{\varepsilon} = \left(1 + \frac{G_1}{G_2}\right) \sigma + \frac{\eta_1}{2G_2} \dot{\sigma}$$

Funciones en s

$$Q_1(s) = 2G_1 + \eta_1 s$$

$$P_1(s) = 1 + \frac{G_1}{G_2} + \frac{\eta_1 s}{2G_2}$$

Fluencia

$$\varepsilon = \frac{\sigma(t)}{2G_2} + \frac{1}{2G_1} \left[ \sigma(t) - \sigma(0) \cdot e^{-\frac{2G_1}{\eta_1} t} \right] - \frac{1}{2G_1} \int_0^t e^{-\frac{2G_1}{\eta_1} (t-z)} \dot{\sigma} dz$$

Para  $\sigma = ct = \sigma(0)$

$$\varepsilon = \sigma(0) \left[ \frac{1}{2G_2} + \frac{1}{2G_1} - \frac{1}{2G_1} e^{-\frac{2G_1}{\eta_1} t} \right]$$

Relajación

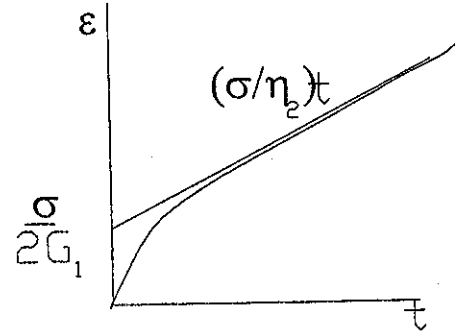
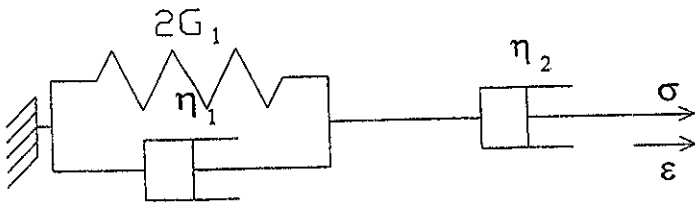
$$\frac{\sigma(t)}{2G_2} = \frac{G_1}{G_1 + G_2} \varepsilon(t) + \frac{G_2}{G_1 + G_2} \varepsilon(0) e^{-\frac{2G_1 + G_2}{\eta_1} t} + \frac{G_2}{G_1 + G_2} \int_0^t e^{-\frac{2G_1 + G_2}{\eta_1} (t-z)} \dot{\varepsilon} dz$$

Para  $\varepsilon(t) = ct = \varepsilon(0)$

$$\sigma(t) = \frac{2G_1 G_2}{G_1 + G_2} \left( \frac{1}{G_2} + \frac{1}{G_1} e^{-\frac{2G_1 + G_2}{\eta_1} t} \right) \varepsilon(0)$$



Combinación (VKS):



Ec. diferencial

$$2G_1 \dot{\epsilon} + \eta_1 \ddot{\epsilon} = 2 \frac{G_1}{\eta_2} \sigma + \left(1 + \frac{\eta_1}{\eta_2}\right) \dot{\sigma}$$

Funciones en s

$$\bar{Q}_1(s) = 2G_1 s + \eta_1 s^2$$

$$\bar{P}_1(s) = 2 \frac{G_1}{\eta_2} + \left(1 + \frac{\eta_1}{\eta_2}\right) s$$

Fluencia:

$$\epsilon(t) = \frac{1}{\eta_2} \int_0^t \sigma(z) dz + \frac{1}{2G_1} \left( \sigma(t) - \sigma(0) \right) e^{-\frac{2G_1}{\eta_1} t} - \frac{1}{2G_1} \int_0^t e^{-\frac{2G_1}{\eta_1} (t-z)} d\sigma$$

luego  $\sigma(t) = \sigma_0 e = \sigma(0)$

$$\epsilon(t) = \sigma_0 \left[ \frac{t}{\eta_2} + \frac{1}{2G_1} \left( 1 - e^{-\frac{2G_1}{\eta_1} t} \right) \right]$$

Relajación:

⊗ No hay función general de relajación

TABLE 1.—(Continued)

	Transform	Function
T29	$\frac{2a^3}{p^4 - a^4}$	$\sinh at - \sin at$
T30	$\frac{2a^2 p}{p^4 - a^4}$	$\cosh at - \cos at$
T31	1	$s(t)$
T32	$e^{-pt_1}$	$s(t - t_1)$
T33	$p$	$\mathfrak{D}(t)$
T34	$p e^{-pt_1}$	$\mathfrak{D}(t - t_1)$
T35	$\frac{1}{p^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \quad (n > 0)$
T35a	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$t^n \quad (n > -1)$
T36	$\frac{1}{(p+a)^n}$	$\frac{t^{n-1} e^{-at}}{(n-1)!} \quad (n > 0)$
T37	$\frac{p}{(p+a)^n}$	$\frac{(n-1) - at}{(n-1)!} t^{n-2} e^{-at} \quad (n > 1)$
T38	$\frac{a^{2n-1}}{(p^2 + a^2)^n}$	$\frac{1}{2^{n-1}(n-1)!} \left[ \sqrt{\frac{\pi}{2}} (at)^{n-1/2} J_{n-1/2}(at) \right] \quad (n > 0)$
T39	$\frac{a^{2n-2} p}{(p^2 + a^2)^n}$	$\frac{at}{2^n(n-1)!} \left[ \sqrt{\frac{\pi}{2}} (at)^{n-3/2} J_{n-3/2}(at) \right] \quad (n > \frac{1}{2})$
T40	$\frac{a^{2n-1}}{(p^2 - a^2)^n}$	$\frac{1}{2^{n-1}(n-1)!} \left[ \sqrt{\frac{\pi}{2}} (at)^{n-1/2} I_{n-1/2}(at) \right] \quad (n > 0)$
T41	$\frac{a^{2n-2} p}{(p^2 - a^2)^n}$	$\frac{at}{2^n(n-1)!} \left[ \sqrt{\frac{\pi}{2}} (at)^{n-3/2} I_{n-3/2}(at) \right] \quad (n > \frac{1}{2})$

TABLE I  
LAPLACE TRANSFORMS

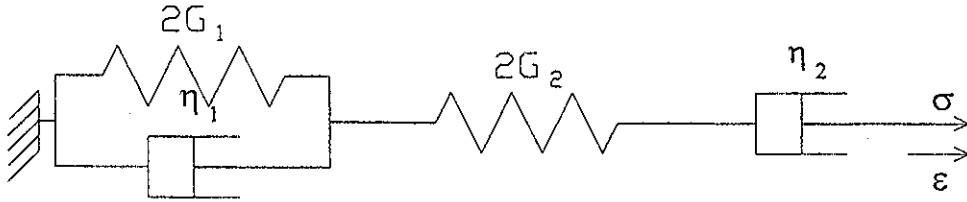
	Transform	Function
T1	$\bar{f}(p) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$	$f(t)$
T2	$a\bar{f}(p) + b\bar{g}(p)$	$a f(t) + b g(t)$
T3	$p\bar{f}(p) - f(0)$	$\frac{df(t)}{dt}$
T4	$p^2\bar{f}(p) - p f(0) - \frac{df(0)}{dt}$	$\frac{d^2f(t)}{dt^2}$
T5	$p^n \bar{f}(p) - \sum_{k=1}^n p^{n-k} \frac{d^{k-1}f(0)}{dt^{k-1}}$	$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$
T6	$\frac{1}{p^n} \bar{f}(p)$	$\int_0^t \dots \int_0^t f(t) dt \dots dt$ <i>(n times)</i>
T7	$(-)^n \frac{d^n \bar{f}(p)}{dp^n}$	$t^n f(t)$
T8	$\bar{f}(p - a)$	$e^{at} f(t)$
T9	$e^{-ap} \bar{f}(p)$	$\begin{cases} f(t - a) & \text{when } t > a \\ 0 & \text{when } t < a \end{cases}$
T10	$\bar{f}(p) \bar{g}(p)$	$\int_0^t f(t - s) g(s) ds = \int_0^t f(s) g(t - s) ds$
T11	$\frac{1}{p}$	1
T12	$\frac{1}{p + a}$	$e^{-at}$
T13	$\frac{1}{(p + a)(p + b)}$	$\frac{1}{a - b} (e^{-bt} - e^{-at})$
T14	$\frac{p}{(p + a)(p + b)}$	$\frac{1}{b - a} (b e^{-bt} - a e^{-at})$
T15	$\frac{a}{p^2 + a^2}$	$\sin at$
T16	$\frac{p}{p^2 + a^2}$	$\cos at$
T17	$\frac{a}{p^2 - a^2}$	$\sinh at$
T18	$\frac{p}{p^2 - a^2}$	$\cosh at$
T19	$\frac{2ap}{(p^2 + a^2)^2}$	$t \sin at$
T20	$\frac{2a^3}{(p^2 + a^2)^2}$	$t \cos at$
T21	$\frac{2ap}{(p^2 + a^2)^2}$	$\sin at - at \cos at$
T22	$\frac{2ap}{(p^2 - a^2)^2}$	$t \sinh at$
T23	$\frac{2a^3}{(p^2 - a^2)^2}$	$t \cosh at$
T24	$\frac{2a^3}{(p^2 - a^2)^2}$	$at \cosh at - \sinh at$
T25	$\frac{a}{(p + b)^2 + a^2}$	$e^{-bt} \sin at$
T26	$\frac{p + b}{(p + b)^2 + a^2}$	$e^{-bt} \cos at$
T27	$\frac{4a^3}{p^4 + 4a^4}$	$\sin at \cosh at - \cos at \sinh at$
T28	$\frac{2a^2 p}{p^4 + 4a^4}$	$\sin at \sinh at$

1.8.1 1.4 De cuatro elementos:

Cuerpo de Burger (B):

Función en  $s$

$$\bar{Q}_1(s) = 2G_1 s + \eta_1 s^2 \qquad \bar{P}_1(s) = 2 \frac{G_1}{\eta_2} + \left(1 + \frac{G_1}{G_2} + \frac{\eta_1}{\eta_2}\right) s + \frac{\eta_1}{2G_2} s^2$$



Ecua<sup>o</sup>n diferencial

$$2G_1 \dot{\epsilon} + \eta_1 \ddot{\epsilon} = 2 \frac{G_1}{\eta_2} \sigma + \left(1 + \frac{G_1}{G_2} + \frac{\eta_1}{\eta_2}\right) \dot{\sigma} + \frac{\eta_1}{2G_2} \ddot{\sigma}$$

Funci<sup>o</sup>n de frecuencia

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{2G_2} + \frac{1}{\eta_2} \int_0^t \sigma(z) dz + \frac{1}{2G_1} \left( \sigma(t) - \sigma_0 e^{-2 \frac{G_1}{\eta_1} t} \right) - \frac{1}{2G_1} \int_0^t e^{-\frac{2G_1}{\eta_1}(t-z)} d\sigma$$

Para  $\sigma(t) = \sigma_0 t = \sigma(t)$

$$\epsilon(t) = \sigma_0 \left[ \left( \frac{1}{2G_2} + \frac{t}{\eta_2} \right) + \frac{1}{2G_1} \left( 1 - e^{-2 \frac{G_1}{\eta_1} t} \right) \right]$$

Funci<sup>o</sup>n de relajaci<sup>o</sup>n

Referencias bibliograficas

Y.C. FUNG *Foundations of Solid Mechanics*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1965. 525 p.

I.W. FARMER. *Engineering Properties of Rock*. London: E & F.N Spon limited, 1968. 180 p.

R. M. Christensen. *Theory of Viscoelasticity An Introduction*. New York and London: Academic Press, Inc, 1971. 245p.

F.B. Hildebrand. *Advance Calculus for Application*. 2ª edición, Prentice Hall, 1976.

ANALISIS DE LA CONVERGENCIA

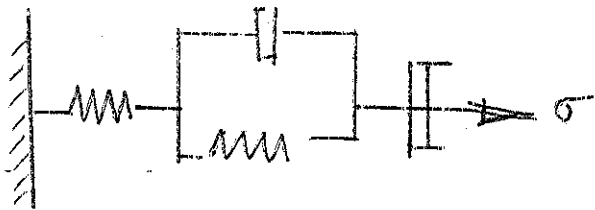
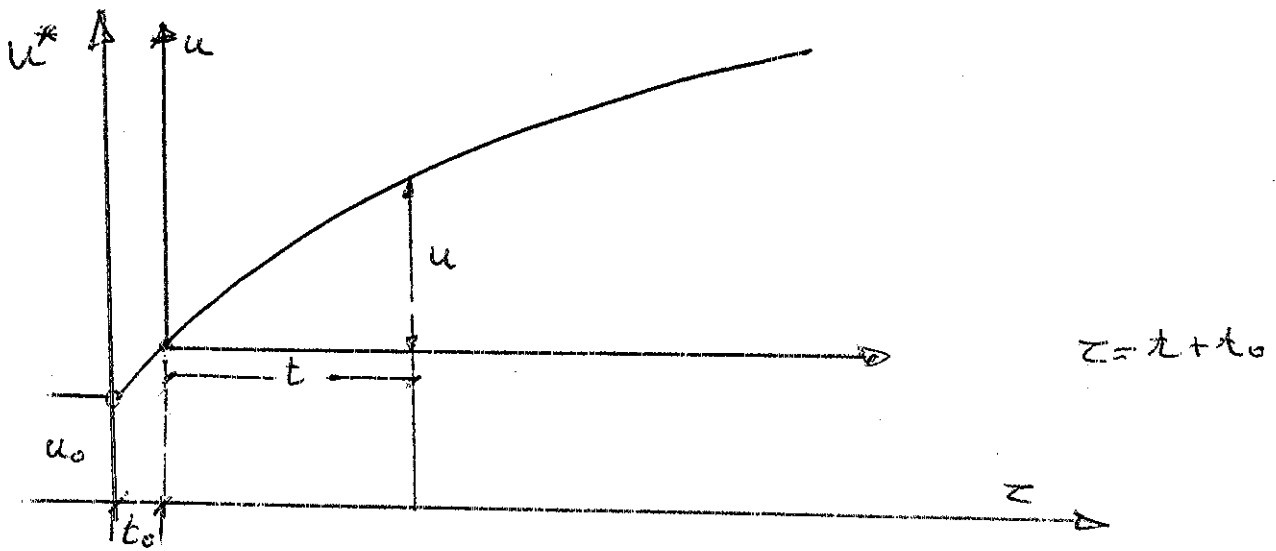
---

TUNELES EN MEDIOS REOLÓGICOS

A. Servans 2007

# CONVERGENCIA TOTAL

(1)



$$u^* = u_0 + v_L z + u_k^* \left(1 - e^{-\frac{z}{T}}\right)$$

## PARAMETROS

- $u_0$ , Convergencia inicial
- $v_L$  Velocidad límite
- $u_k^*$  Aumento de velocidad total
- $T$  Tiempo intrínseco

## CONVERGENCIA MEDIDA

$$u(t) = u(\tau) - u(t_0)$$

$$u(t) = v_L t + u_K (1 - e^{-\frac{t}{T}})$$

Con

$$u_K = u_K^* e^{-\frac{t_0}{T}} \rightarrow u_K^* = u_K e^{\frac{t_0}{T}}$$

## PARAMETROS A AJUSTAR

$v_L$  Velocidad límite

$u_K$  Aumento Kelvin medible

$T$  Tiempo intrínseco



## VELOCIDAD DE CONVERGENCIA

$$V = V_L + \frac{u_k}{T} e^{-\frac{t}{T}}$$

$$V = V_L + V_k e^{-\frac{t}{T}}$$

con  $V_k = \frac{u_k}{T} \rightarrow u_k = T \cdot V_k$

## PARAMETROS A AJUSTAR

$V_L$  Velocidad límite

$V_k$  Velocidad Kelvin

$T$  Tiempo inercial

# PROCEDIMIENTO DE AJUSTO

Variable auxiliar  $\cdot W$

$$W = V - V_L$$

ley a ajustar:

$$W = V_k \cdot e^{-t/T}$$

hipotesis  $\cdot$  se impone conocido  $V_L$

$$\ln W = \ln V_k - \frac{1}{T} t$$

ley canónica

$$y = a - bt$$

siendo

$$y = \ln W = \ln (V - V_L)$$

$$a = \ln V_k$$

$$b = \frac{1}{T}$$

## PARAMETROS A AJUSTAR

(5)

Los parámetros a ajustar son funciones de  $V_L$

$$a(V_L) = \ln V_k$$

$$b(V_L) = \frac{1}{T}$$

Para  $V_L$  se impone un valor "razonable"

## RESULTADOS DEL AJUSTE (Para un cierto $V_L$ )

$$a = \ln V_k \quad V_k = e^a$$

$$b = \frac{1}{T}$$

$$T = \frac{1}{b}$$

$$u_k = V_k T = \frac{e^a}{b}$$

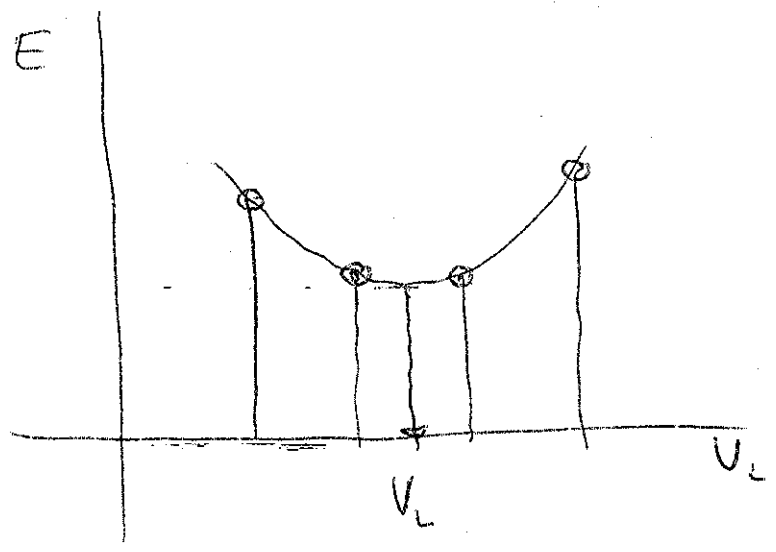
$$u_k^* = u_k \cdot e^{\frac{t_0}{T}} = \frac{e^{a+b t_0}}{b}$$

Se impone conocido el tiempo  $t_0$  de colocación de la estación de medida

# AJUSTE DE $V_L$

$$E(V_L) = \sum (y_i - a + bt_i)^2$$

Se minimiza la función  $E(V_L)$



Para  $E$  mínimo se determina  $V_L$

A partir de  $V_L$  se determinan los valores de  $a$  y  $b$  finales.

## CONCLUSIONES

- 1º. Se pueden encontrar los parámetros que definen el comportamiento, excepto  $u_0$
- 2º. El ariento inicial  $u_0$ , hay que estimarlo directamente
- 3º. La velocidad límite  $V_L$ , es fundamental  
- Si  $V_L = 0$ , el proceso es estable con limitaciones

---

Si  $V_L \neq 0$  El proceso es inestable

## ANÁLISIS DE VL

Hay que estudiar la función  $S=(Vt)$

- Si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S = K > 0$$

El proceso es inestable

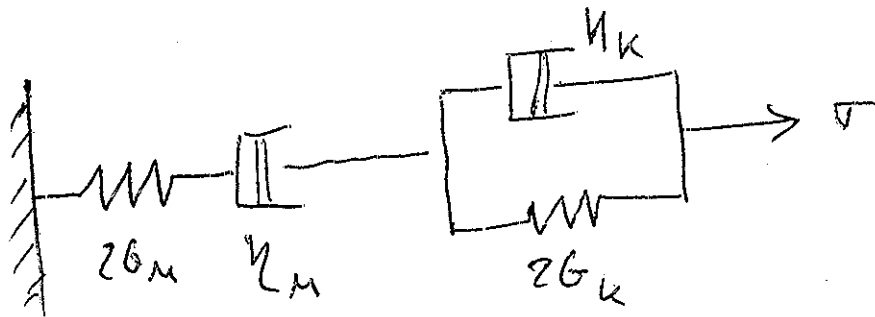
ya que

$$u \approx K \ln t \rightarrow \infty$$

- Si  $\lim_{t \rightarrow \infty} S = 0$

El proceso es estable

## CONSTANTES DEL MODELO



Ley de convergencia

$$u = (P_0 - \sigma_a) \left[ \frac{1}{2G_M} + \frac{t}{\eta_M} + \frac{1}{2G_K} \left( 1 - e^{-\frac{2G_K t}{\eta_K}} \right) \right]$$

$$\eta_M = \frac{P_0 - \sigma_a}{V_L V_L}$$

$$2G_K = \frac{P_0 - \sigma_a}{u_K}$$

$$\eta_K = 2G_K \cdot T = \frac{P_0 - \sigma_a \cdot T}{u_K}$$

---

$2G_M$  no puede encontrarse con este procedimiento.

---

El caso

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Vt = K$$

no corresponde al modelo de Burgers